7.4.9 Výpočty vzdáleností I

Př. 1: Urči vzdálenost bodu P od roviny ρ. Příklad řeš ve dvou sloupcích, vlevo konkrétně pro bod $P[4;-3;3]$ a rovinu $\rho: x-2y+2z+2=0$, vpravo obecně pro bod $P[p_1;p_2;p_3]$ a rovinu $\rho: ax+by+cz+d=0$.

Postup při výpočtu:

1. Najdeme přímku q, která prochází bodem P a je kolmá na rovinu ρ.
2. Najdeme průsečík Q přímky q a roviny ρ.
3. Vzdálenost $d=|PQ|$ je vzdáleností bodu P od roviny ρ.

Určení přímky *q*:

$$q:\ \begin{aligned} x&=4+t\\ y&=-3-2t\\ z&=3+2t \end{aligned}$$

Průsečík přímky *q* a roviny ρ:

$(4+t)-2(-3-2t)+2(3+2t)+2=0$

$4+t+6+4t+6+4t+2=0$

$9t=-18$

$t=-2$

Průsečíkem je bod $Q[2;1;-1]$.

Vzdálenost bodů *P* a *Q*

$|PQ|=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2}=$

$=\sqrt{(2-4)^2+(1-(-3))^2+(-1-3)^2}=6$

Určení přímky *q*:

$$q:\ \begin{aligned} x&=p_1+at\\ y&=p_2+bt\\ z&=p_3+ct \end{aligned}$$

Průsečík přímky *q* a roviny ρ:

$a(p_1+at)+b(p_2+bt)+c(p_3+ct)+d=0$

$t=-\dfrac{(ap_1+bp_2+cp_3+d)}{a^2+b^2+c^2}$

Průsečíkem je bod $Q[p_1+at;p_2+bt;p_3+ct]$.

Vzdálenost bodů *P* a *Q*

$|PQ|=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2}=$

$=|t|\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$|PQ|=|t|\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Př. 2: Urči vzdálenost bodu $P[4;-3;3]$ od roviny $\rho: x-2y+2z+2=0$ pomocí odvozeného vzorce.

$\rho: x-2y+2z+2=0$ $P[4;-3;3]$ $d=\dfrac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|4-2\cdot(-3)+2\cdot3+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{|18|}{3}=6$

Př. 3: Urči vzdálenost bodu $P[1;-3;5]$ od roviny ABC: $A[-1;0;0]$, $B[1;2;1]$, $C[3;0;-2]$.

$\boldsymbol{u}=B-A=(2;2;1)2;2$

$C-A=(4;0;-2)\Rightarrow \boldsymbol{v}=(2;0;-1)2;0$

$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(-2-0;2+2;0-4)=(-2;4;-4)\ \Rightarrow\ \boldsymbol{n}=(1;-2;2)$

Rovnice: $x-2y+2z+d=0$. Dosadíme bod A: $-1-2\cdot0+2\cdot0+d=0\ \Rightarrow\ d=1$.

$d=\dfrac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|1-2\cdot(-3)+2\cdot5+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{|18|}{3}=6$

Př. 4: Urči vzdálenost rovin $\rho: 2x - y + 3z + 1 = 0$ a $\sigma: 4x - 2y + 6z + 5 = 0$.

$\begin{array}{l} \boldsymbol{n}_\rho = (2;-1;3) \\ \boldsymbol{n}_\sigma = (4;-2;6) \end{array}$ $\Rightarrow$ platí $\boldsymbol{n}_\sigma = 2\boldsymbol{n}_\rho$ $\Rightarrow$ roviny jsou rovnoběžné.

bod v rovině σ: $S[0;y;0]$ $\Rightarrow$ $y = \frac{5}{2}$.

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\left|2 \cdot 0 - 1 \cdot \frac{5}{2} + 3 \cdot 0 + 1\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{14}} = \frac{3}{2\sqrt{14}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{28}.$$

Př. 5: Na přímce $p = \{[1+2t; 3-t; 4+t]; t \in R\}$ najdi bod, jehož vzdálenost od souřadné roviny *xz* je 5. Je možné příklad vyřešit i bez použití vzorce pro vzdálenost bodu od roviny?

Hledaný bod má souřadnice: $X[1+2t; 3-t; 4+t]$.

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|0 \cdot (1+2t) + 1 \cdot (3-t) + 0 \cdot (4+t) + 0|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = \frac{|3-t|}{1} = 5$$

$|3-t| = |t-3| = 5$ $\Rightarrow$ hledáme čísla vzdálená od 3 o 5 $\Rightarrow$ dvě řešení:

- $t_1 = 8$ $\Rightarrow$ $X_1[1+2\cdot 8; 3-8; 4+8] \Rightarrow X_1[17;-5;12]$
- $t_2 = -2$ $\Rightarrow$ $X_2[1+2\cdot(-2); 3-(-2); 4+(-2)] \Rightarrow X_2[-3;5;2]$

Hledanými body jsou body $X_1[17;-5;12]$ a $X_2[-3;5;2]$.

Př. 6: Je dána standardní krychle *ABCDEFGH* $a = 4\,\text{cm}$. Urči vzdálenost bodu *E* od roviny *AFH*.

$A[4;0;0]$	$B[4;4;0]$	$C[0;4;0]$	$D[0;0;0]$
$E[4;0;4]$	$F[4;4;4]$	$G[0;4;4]$	$H[0;0;4]$

Směrové vektory: $\begin{array}{l} F - A = (0;4;4) \\ H - A = (-4;0;4) \end{array}$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} \boldsymbol{u} = (0;1;1;)\,0;1 \\ \boldsymbol{v} = (-1;0;1)\,-1;0 \end{array}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{n} = (1;-1;1)$.

Rovnice: $x - y + z + d = 0$, dosadíme bod $A[4;0;0]$ $4 - 0 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = -4$.

Rovina *AFH*: $x - y + z - 4 = 0$.

Vypočteme vzdálenost bodu $E[4;0;4]$ od roviny *AFH*:

$$d = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|4-0+4-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Př. 7: Petáková:
strana 120/cvičení 67
strana 120/cvičení 70